数理解析研究所講究録 1319 巻 2003 年 85-94

ARITHMETIC PROPERTIES OF THE LEAPING CONVERGENTS OF $e^{1/s}$

三重大教育　小松　尚夫　(TAKAO KOMATSU)
FACULTY OF EDUCATION,
MIE UNIVERSITY

1. 序論

実数 α の単純連分数展開 $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\dots]$ の第n近似を $p_n/q_n=[a_0;a_1,\dots,a_n]$ で表す。p_n たちや q_n たちがいろいろな関係式を満たすことはよく知られている。例えば、

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}\quad(n\ge 0),\quad p_{-1}=1,\quad p_{-2}=0,$$
$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\quad(n\ge 0),\quad q_{-1}=0,\quad q_{-2}=1$$

や、また

$$p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}=(-1)^n$$
$$p_{n-2}q_n-p_nq_{n-2}=(-1)^{n-1}a_n$$

などである (例えば [2], [3] などを見よ)。

Elsner [1] はEuler数 eについて、その近似分数を２つ飛びに取ったものがもとの関係式と類似した関係を満たすことを見出した。すなわち、連分数展開 $e=[2;1,2,1,1,4,1,\dots]=[2;\overline{1,2n,1}]_{n=1}^{\infty}$, に対して

$$P_n=p_{3n+1},\quad Q_n=q_{3n+1}\quad(n\ge 0)$$
$$P_{-1}=P_{-2}=Q_{-1}=1,\quad Q_{-2}=-1,$$
$$P_{-n}=P_{n-3},\quad Q_{-n}=-Q_{n-3}\quad(n\ge 3)$$

と置くと、任意の整数（負の場合も含めて）nについて

$$P_n=C_nP_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n=C_nQ_{n-1}+Q_{n-2}$$
$$P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}=2(-1)^{n-1},$$
$$P_{n-2}Q_n-P_nQ_{n-2}=2C_n(-1)^n$$

などが成り立つというものである。ここで、$C_n=2(2n+1)$. その他にも様々な合同式が成り立つことが示された。

しかし、同様なことは、２つ飛びでも取り方を変えたり、また１つ飛びや６つ飛びなど別の取り方にしたのでは成り立たない。また、e以外の実数については、近似分数をどんな飛び方で取ってももとの漸化関係式と類似の関係が見いだせないことが多い。では、どんなタイプの実数についてeと同様なことが言えるのだろうか。また、その場合どんな取り方をすればよいのだろか。

筆者は$e^{1/s}$ $(s=2,3,\dots)$について調べて類似した結果をまず得たが、実はもっと一般の場合についても拡張することができたので、それをここに述べる。

2. 漸化関係式

まず最初に

$$[a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k}]_{n=1}^{\infty}$$

という形の単純連分数展開について考えよう。ここで、a_0 は整数定数で、各 $a_i = a_i(n)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ は正整数定数か、$n = 1, 2, \dots$ に対して正整数となる n の関数とする。また、実数の連分数展開の近似分数を k 番ごと（すなわち、連分数展開の周期 k と一致させる）に取るものとする。

この時、次の結果が成り立つ。

定理 1. もし実数 α の連分数展開が $\alpha = [a_0; \overline{T(n), c_2, c_3, \dots, c_k}]_{n=1}^{\infty}$ という形、ただし、$T(x)$ は、$T(n)$ が $n = 1, 2, \dots$ に対して正整数となるような関数で、k が奇数、$c_2, c_3, \dots, c_k$ が正整数定数であるならば、近似分数の分子分母に対して、

$$\begin{aligned} p_{kn} &= S(n)p_{kn-k} + p_{kn-2k} \quad (n \geq 1), \quad p_0 = a_0, \quad p_{-k} = u - a_0 v, \\ q_{kn} &= S(n)q_{kn-k} + q_{kn-2k} \quad (n \geq 1), \quad q_0 = 1, \quad q_{-k} = -v \end{aligned}$$

という関係式が成り立つ。ここで、$S(n) = uT(n) + v + w$ であり、正整数 u, v, w は

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。

さらにもし a_i $(i = 2, \dots, k)$ が定数か n の単調増加関数であるならば、上記の連分数は関係式を満たす唯一の場合を与える。

注. もし部分商 a_i が定数でも増加関数でもなく、あるいは連分数展開の周期が k でないなら、上記の連分数展開以外にも漸化関係式を満たすようなタイプのものが存在することになる。変わった形として、後述の例 3 を見ていただきたい。

証明. $n \geq 2$ とする。

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ w_n & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kn-k+2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{kn} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また

$$\begin{pmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} \\ w_{n-1} & x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kn-2k+2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{kn-k} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置く。すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{kn} & p_{kn-1} \\ q_{kn} & q_{kn-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{kn-k} & p_{kn-k-1} \\ q_{kn-k} & q_{kn-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kn-k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{kn-k+1}u + w)p_{kn-k} + up_{kn-k-1} & (a_{kn-k+1}v + x)p_{kn-k} + vp_{kn-k-1} \\ (a_{kn-k+1}u + w)q_{kn-k} + uq_{kn-k-1} & (a_{kn-k+1}v + x)q_{kn-k} + vq_{kn-k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、$p_{kn}=(a_{kn-k+1}u+w)p_{kn-k}+up_{kn-k-1}$を得る。

$$\begin{pmatrix} p_{kn-k} & p_{kn-k-1} \\ q_{kn-k} & q_{kn-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{kn-2k} & p_{kn-2k-1} \\ q_{kn-2k} & q_{kn-2k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kn-2k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p_{kn-2k} & p_{kn-2k-1} \\ q_{kn-2k} & q_{kn-2k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{kn-k} & p_{kn-k-1} \\ q_{kn-k} & q_{kn-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{kn-2k+1}u'+w' & a_{kn-2k+1}v'+x' \\ u' & v' \end{pmatrix}^{-1} \\
&= (-1)^k \begin{pmatrix} p_{kn-k} & p_{kn-k-1} \\ q_{kn-k} & q_{kn-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' & -(a_{kn-2k+1}v'+x') \\ -u' & a_{kn-2k+1}u'+w' \end{pmatrix} \\
&= (-1)^k \begin{pmatrix} v'p_{kn-k}-u'p_{kn-k-1} & * \\ v'q_{kn-k}-u'q_{kn-k-1} & ** \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

すなわち、$p_{kn-2k}=(-1)^k(v'p_{kn-k}-u'p_{kn-k-1})$が成り立つ。これを $p_{kn}=S(n)p_{kn-k}+p_{kn-2k}$に代入すると

$$(a_{kn-k+1}u+w)p_{kn-k}+up_{kn-k-1}=S(n)p_{kn-k}+(-1)^k(v'p_{kn-k}-u'p_{kn-k-1})$$

を得る。よって、

$$a_{kn-k+1}u+w=S(n)+(-1)^kv' \quad かつ \quad u=-(-1)^ku'$$

が導かれる。u と u' は正整数であるから、kは奇数で $u=u'$でなければならない。そして、$T(n)=a_{kn-k+1}$と置くことができる。u はa_{kn-k+1}と無関係であるから、これは必ずしも定数である必要はない。故に、$S(n)=uT(n)+v'+w$である。

u の値は $a_{kn-k+2}, \ldots, a_{kn}$の全てによっている。もし、$a_i$ $(i=1,\ldots,k)$が定数か増加関数であるならば、$u_1=u_2=\ldots$より、$a_{kn-k+2}, \ldots, a_{kn}$ のすべては定数でなければならない。

故に、どの$n\geq 2$に対しても、$v=v'$ かつ $w=w'$ であり、よって$S(n)=uT(n)+v+w$となる。ここで、$u=u_1=u_2=\ldots$, $v=v_1=v_2=\ldots$, $w=w_1=w_2=\ldots$ (そして $x=x_1=x_2=\ldots$) は正整数定数である。

近似分数の分母qについても同様の議論となるので省略する。

また初期値については

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0T(1)u+a_0w+u & a_0T(1)v+a_0x+v \\ T(1)u+w & T(1)v+x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるので、$p_k=a_0T(1)u+a_0w+u$ かつ $q_k=T(1)u+w$を得る。よって、

$$p_{-k}=p_k-S(1)p_0=a_0T(1)u+a_0w+u-(uT(1)+v+w)a_0=u-a_0v$$

かつ

$$q_{-k}=q_k-S(1)q_0=T(1)u+w-(uT(1)+v+w)=-v$$

と取ればよい。 □

もし定数 $c_2, \ldots, c_k$ が明示されるのを好まないのであれば、定理１のαの連分数展開は次のように書くことも出来る。

事実 1. 連分数

$$\alpha = a_0 + \cfrac{u}{S(1) - v + \cfrac{1}{S(2) + \cfrac{1}{S(3) + \cfrac{1}{S(4) + \ddots}}}}$$

であり、このn次近似はちょうど p_{kn}/q_{kn} $(n = 0, 1, 2, \dots)$ に等しい。

証明.

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{u}{S(1) - v + \cfrac{1}{S(2) + \cfrac{1}{S(3) + \ddots + \cfrac{1}{S(n)}}}} \quad (n \geq 0)$$

と置く。 一般連分数展開

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{\epsilon_1}{a_1 + \cfrac{\epsilon_2}{a_2 + \cfrac{\epsilon_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{\epsilon_n}{a_n}}}}$$

については

$$P_n = a_n P_{n-1} + \epsilon_n P_{n-2} \quad (n \geq 1), \quad P_0 = a_0, \quad P_{-1} = 1,$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + \epsilon_n Q_{n-2} \quad (n \geq 1), \quad Q_0 = 1, \quad Q_{-1} = 0$$

が成り立つことに注意すると、この場合

$$\epsilon_1 = u, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \cdots = 1, \quad a_1 = S(1) - v \quad \text{かつ} \quad a_n = S(n) \quad (n \geq 2)$$

である。

$$P_0 = a_0 = p_0, \quad P_1 = a_0 S(1) + u - a_0 v = p_k$$
$$Q_0 = 1 = q_0, \quad Q_1 = S(1) - v = q_k$$

であることは容易に確かめられる。 $n \geq 2$ については

$$P_n = S(n) P_{n-1} + P_{n-2}, \quad p_{kn} = S(n) p_{kn-k} + p_{kn-2k}$$
$$Q_n = S(n) Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad q_{kn} = S(n) q_{kn-k} + q_{kn-2k}$$

となる。$P_n/Q_n = p_{kn}/q_{kn} \to \alpha$ $(n \to \infty)$より結果が導かれる。 □

各k次近似における分子と分母のお互いの関係については、このタイプの場合次が成り立つ.

$$p_{kn-k}q_{kn} - p_{kn}q_{kn-k} = (-1)^n u \quad (n \geq 0)$$

また

$$p_{kn-2k}q_{kn} - p_{kn}q_{kn-2k} = (-1)^{n-1}S(n)u \quad (n \geq 1)\,.$$

証明. $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&p_{kn-k}q_{kn} - p_{kn}q_{kn-k}\\
&= p_{kn-k}\big(S(n)q_{kn-k} + q_{kn-2k}\big) - \big(S(n)p_{kn-k} + p_{kn-2k}\big)q_{kn-k}\\
&= -(p_{kn-2k}q_{kn-k} - p_{kn-k}q_{kn-2k})\\
&= p_{kn-3k}q_{kn-2k} - p_{kn-2k}q_{kn-3k}\\
&= \dots\\
&= (-1)^{n-1}(p_0q_k - p_kq_0)\\
&= (-1)^{n-1}\big(a_0T(1)u + a_0w - a_0T(1)u - u - a_0w\big)\\
&= (-1)^n u\,.
\end{aligned}$$

また $n = 0$ に対しては

$$p_{-k}q_0 - p_0q_{-k} = (u - a_0v)\cdot 1 - a_0(-v) = u\,.$$

第二の関係式は、第一の関係式から $n \geq 1$ について

$$\begin{aligned}
&p_{kn-2k}q_{kn} - p_{kn}q_{kn-2k}\\
&= p_{kn-2k}(S(n)q_{kn-k} + q_{kn-2k}) - (S(n)p_{kn-k} + p_{kn-2k})q_{kn-2k}\\
&= S(n)(p_{kn-2k}q_{kn-k} - p_{kn-k}q_{kn-2k})\\
&= (-1)^{n-1}S(n)u\,.
\end{aligned}$$

□

3. 様々なバリエーション

定理 1 の場合で、周期を k に保ったまま、1だけずらしてみる。すると、定理 1 に対応した次の結果が成り立つ。

定理 3. もし実数 α の連分数展開が　$\alpha = [a_0; \overline{c_1, T(n), c_3, \dots, c_k}]_{n=1}^{\infty}$　という形、ただし、$T(x)$ は、$T(n)$ が $n = 1, 2, \dots$ に対して正整数となるような関数で、k が奇数、$c_1, c_3, \dots, c_k$ が正整数定数であるならば、近似分数の分子分母に対して、

$$p_{kn+1} = S(n)p_{kn-k+1} + p_{kn-2k+1} \quad (n \geq 1), \quad p_{-k+1} = p_0u - p_1v,$$
$$q_{kn+1} = S(n)q_{kn-k+1} + q_{kn-2k+1} \quad (n \geq 1), \quad q_{-k+1} = q_0u - q_1v$$

という関係式が成り立つ。ここで、$S(n) = uT(n) + v + w$ であり、正整数 u, v, w は

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

さらにもし$T(n)$以外の部分商が定数か増加関数であるならば、上記の連分数は関係式を満たす唯一の場合を与える。

証明. $\alpha = [a_0; c_1, \overline{T(n), c_3, \ldots, c_k, c_1}]_{n=1}^{\infty}$ と書けることに注意する。また

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} p_1 T(1)u + p_1 w + p_0 u & p_1 T(1)v + p_1 x + p_0 v \\ q_1 T(1)u + q_1 w + q_0 u & q_1 T(1)v + q_1 x + q_0 v \end{pmatrix}$$

であるから、

$$p_{k+1} = p_1 T(1)u + p_1 w + p_0 u \quad \text{かつ} \quad q_{k+1} = q_1 T(1)u + q_1 w + q_0 u$$

を得る。よって、初期値を

$$\begin{aligned} p_{-k+1} &= p_{k+1} - S(1)p_1 \\ &= p_1 T(1)u + p_1 w + p_0 u - (uT(1) + v + w)p_1 \\ &= p_0 u - p_1 v \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} q_{-k+1} &= q_{k+1} - S(1)q_1 \\ &= q_1 T(1)u + q_1 w + q_0 u - (uT(1) + v + w)q_1 \\ &= q_0 u - q_1 v \end{aligned}$$

とすればよい。 □

定理 4. αの連分数展開が定理3で与えられるとき、

$$p_{kn-k+1}q_{kn+1} - p_{kn+1}q_{kn-k+1} = (-1)^{n+1}u \quad (n \geq 0)$$

また

$$p_{kn-2k+1}q_{kn+1} - p_{kn+1}q_{kn-2k+1} = (-1)^n S(n)u \quad (n \geq 1)$$

が成り立つ。

証明. $n \geq 1$に対して

$$\begin{aligned} p_{kn-k+1}q_{kn+1} - p_{kn+1}q_{kn-k+1} &= -(p_{kn-2k+1}q_{kn-k+1} - p_{kn-k+1}q_{kn-2k+1}) \\ &= p_{kn-3k+1}q_{kn-2k+1} - p_{kn-2k+1}q_{kn-3k+1} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n+1}(p_1 q_{k+1} - p_{k+1}q_1) \\ &= (-1)^{n+1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{n+1}u. \end{aligned}$$

$n=0$ に対しては

$$
\begin{aligned}
p_{-k+1}q_1 - p_1q_{-k+1} &= (p_0u - p_1v)q_1 - p_1(q_0u - q_1v) \\
&= (p_0q_1 - p_1q_0)u = -u\,.
\end{aligned}
$$

第二の関係式は、第一の関係式と定理３より、$n \geq 1$ について

$$
\begin{aligned}
&p_{kn-2k+1}q_{kn+1} - p_{kn+1}q_{kn-2k+1} \\
&= p_{kn-2k+1}(S(n)q_{kn-k+1} + q_{kn-2k+1}) - (S(n)p_{kn-k+1} + p_{kn-2k+1})q_{kn-2k+1} \\
&= (-1)^n S(n)u
\end{aligned}
$$

を得る。 $\square$

同様の考えで、一般に i だけずらした場合の次の結果が得られる。

系 1. もし、実数 α の連分数展開が $\alpha = [a_0; \overline{c_1, \ldots, c_i, T(n), c_{i+2}, \ldots, c_k}]_{n=1}^{\infty}$ という形、ただし、$T(x)$ は、$T(n)$ が $n = 1, 2, \ldots$ に対して正整数となるような関数で、k が奇数、c_j $(1 \leq j \leq k,\ j \neq i)$ が正整数定数であるならば、近似分数の分子分母に対して、

$$
\begin{aligned}
p_{kn+i} &= S(n)p_{kn-k+i} + p_{kn-2k+i} \quad (n \geq 1), \quad p_{-k+i} = p_{i-1}u - p_iv, \\
q_{kn+i} &= S(n)q_{kn-k+i} + q_{kn-2k+i} \quad (n \geq 1), \quad q_{-k+i} = q_{i-1}u - q_iv
\end{aligned}
$$

という関係式が成り立つ。ここで、$S(n) = uT(n) + v + w$ であり、正整数 $u,\ v,\ w$ は

$$
\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i+2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

を満たす。
さらにもし $T(n)$ 以外の部分商が定数か増加関数であるならば、上記の連分数は関係式を満たす唯一の場合を与える。

系 2. α の連分数展開が系 1 で与えられるとき、

$$
p_{kn-k+i}q_{kn+i} - p_{kn+i}q_{kn-k+i} = (-1)^{n+i}u \quad (n \geq 0)
$$

また

$$
p_{kn-2k+i}q_{kn+i} - p_{kn+i}q_{kn-2k+i} = (-1)^{n+i-1}S(n)u \quad (n \geq 1)
$$

が成り立つ。

一般の（純でない）周期的なあるいは擬似周期的な連分数展開

$$
[a_0; b_1, \ldots, b_m, \overline{a_{m+1}(n), \ldots, a_{m+k}(n)}]_{n=1}^{\infty}
$$

の場合についても結果を得ることは難しくない。単に

$$
[a_0; b_1, \ldots, b_m, \overline{T(n), c_{m+2} \ldots, c_{m+k}}]_{n=1}^{\infty}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
p_{kn+m} &= S(n)p_{kn-k+m} + p_{kn-2k+m}, \\
q_{kn+m} &= S(n)q_{kn-k+m} + q_{kn-2k+m}
\end{aligned}
$$

という場合を考えればよい。ただし、初期値を少し変える必要はある。

4. 例

簡単のため、$k=3$としよう。最初の例はどの部分商も定数の場合であり、よく知られているように実数α が二次無理数となるときである。

例 1. $\alpha=[a_0;\overline{c_1,c_2,c_3}]$のとき、$i=0,1,2$ に対して

$$p_{3n+i}=(c_1c_2c_3+c_1+c_2+c_3)p_{3n+i-3}+p_{3n+i-6}$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned} p_{3n-3}q_{3n}-p_{3n}q_{3n-3}&=(-1)^n(c_2c_3+1),\\ p_{3n-6}q_{3n}-p_{3n}q_{3n-6}&=(-1)^{n-1}c_1(c_2c_3+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3n-2}q_{3n+1}-p_{3n+1}q_{3n-2}&=(-1)^{n+1}(c_1c_3+1),\\ p_{3n-5}q_{3n+1}-p_{3n+1}q_{3n-5}&=(-1)^n c_2(c_1c_3+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{3n-1}q_{3n+2}-p_{3n+2}q_{3n-1}&=(-1)^n(c_1c_2+1),\\ p_{3n-4}q_{3n+2}-p_{3n+2}q_{3n-4}&=(-1)^{n-1}c_3(c_1c_2+1)\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. 漸化式$p_{3n}=S(n)p_{3n-3}+p_{3n-6}$については、

$$\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_2c_3+1 & c_2\\ c_3 & 1\end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} S(n)&=uT(n)+v+w\\ &=(c_2c_3+1)c_1+c_2+c_3\\ &=c_1c_2c_3+c_1+c_2+c_3\end{aligned}$$

を得る。漸化式$p_{3n+1}=S(n)p_{3n-2}+p_{3n-5}$については、

$$\begin{pmatrix} u & v\\ w & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1c_3+1 & c_3\\ c_1 & 1\end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} S(n)&=uT(n)+v+w\\ &=(c_1c_3+1)c_2+c_3+c_1\\ &=c_1c_2c_3+c_1+c_2+c_3\end{aligned}$$

を得る。漸化式$p_{3n+2} = S(n)p_{3n-1} + p_{3n-4}$については、

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1c_2+1 & c_1 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} S(n) &= uT(n) + v + w \\ &= (c_1c_2+1)c_3 + c_1 + c_2 \\ &= c_1c_2c_3 + c_1 + c_2 + c_3 \end{aligned}$$

を得る。 □

二番目の例は $e^{1/s}$ $(s \geq 2)$の連分数展開に関してである。Elsner が扱ったのは $s=1$の場合だったが、連分数展開のパターンは$s=1$の場合と$s \geq 2$の場合では少し異なる。またこの場合には、都合がよいことにさらに多くの関係式が成り立つことになるのだが、ここでは割愛する。

例 2. $e^{1/s} = [1; \overline{s(2n-1)-1, 1, 1}]_{n=1}^{\infty}$ $(s \geq 2)$のとき、$p_{3n} = 2s(2n-1)p_{3n-3} + p_{3n-6}$が成り立つ。さらに

$$p_{3n-3}q_{3n} - p_{3n}q_{3n-3} = 2(-1)^n \quad (n \geq 0)$$

及び

$$p_{3n-6}q_{3n} - p_{3n}q_{3n-6} = 4s(2n-1)(-1)^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

証明.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より、$S(n) = uT(n) + v + w = 2(s(2n-1)-1) + 1 + 1 = 2s(2n-1)$となる。 □

第三の例は幾分変わっている。もし、部分商に現れる関数が増加関数でなくてもよいのであれば、周期を偶数に取ったり長く取ったりすることが可能である。下の例では近似分数の関係式が3つごとであるにもかかわらず、擬似周期が 12である。もっとも、$S(n)$は $T(n)$の線形形式で表されるが一定ではない。

例 3. p_n/q_n が連分数展開

$$[a_0, \overline{T(4n-3), 1, 6, T(4n-2), 2, 3, T(4n-1), 3, 2, T(4n), 6, 1}]_{n=1}^{\infty}$$

のn次近似 $(n = 0, 1, 2, \dots)$、ただし $T(x)$ は、$T(n)$ は整数$n = 1, 2, \dots$ に対して正整数となるような関数であるとき、$p_{3n} = S(n)p_{3n-3} + p_{3n-6}$ $(n \geq 1)$が成り立つ。ここで、$S(1) = 7T(1) + 7$,

$$S(n) = \begin{cases} 7T(n) + 12. & n \equiv 1 \pmod 4; \\ 7T(n) + 4, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (n \geq 2).$$

証明. $k=3$とする。$u_1=u_2=\dots$より、$u-1=c_2c_3=c_5c_6=c_8c_9=\dots$である。ここで、$u=7$ かつ (v_n,w_n) $(n=1,2,\dots)$ を

$$
\begin{aligned}
&(c_2,c_3)=(1,6),\quad (c_5,c_6)=(2,3),\quad (c_8,c_9)=(3,2),\quad (c_{11},c_{12})=(6,1),\\
&(c_{14},c_{15})=(1,6),\quad (c_{17},c_{18})=(2,3),\quad (c_{20},c_{21})=(3,2),\quad (c_{23},c_{24})=(6,1),\\
&\dots
\end{aligned}
$$

として取る。$S(n)=uT(n)+v_{n-1}+w_n$ $(n\ge 2)$であることに注意する。この場合、連分数展開は

$$[a_0;T(1),1,6,T(2),2,3,T(3),3,2,T(4),6,1,T(5),1,6,\dots]$$

であり、

$$
\begin{aligned}
S(2)&=uT(2)+v_1+w_2=uT(2)+c_2+c_6=7T(2)+4\\
S(3)&=uT(3)+v_2+w_3=uT(3)+c_5+c_9=7T(3)+4\\
S(4)&=uT(4)+v_3+w_4=uT(4)+c_8+c_{12}=7T(4)+4\\
S(5)&=uT(5)+v_4+w_5=uT(5)+c_{11}+c_{15}=7T(5)+12\\
S(6)&=uT(6)+v_5+w_6=uT(6)+c_{14}+c_{18}=7T(6)+4\\
&\dots
\end{aligned}
$$

が導かれる。 $\square$

References

[1] C. Elsner, *On arithmetic properties of the convergents of Euler's number*, Colloquium Mathematicum **79** (1999), 133–145.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, Oxford, 5th Edition, 1979.

[3] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. vol. 785, Springer, Berlin.

Takao Komatsu
Faculty of Education
Mie University
Mie, 514-8507
Japan
komatsu@ edu.mie-u.ac.jp